

3.11. Ejemplo de un fractal

Hay una frase conocida que dice que la forma que toma un cuerpo sólido clásico no afecta su volumen. Sin embargo, la naturaleza, al diseñar los pulmones del ser humano, no parece corroborar esta afirmación. Recordemos que el criterio de la verdad en física es la experiencia y las verdades no son absolutas. Planteamos una pequeña experiencia, donde se debe diseñar y poner en práctica una estrategia para saber si el volumen paralelepípedo de una hoja de papel, cambia al transformarse en una esfera. Lograr lo anterior pasa por tener presente, entre otras cosas, que a la base de la situación que estamos planteando hay una ley de conservación que es fundamental para la Física.

La física es una ciencia que se rige por leyes de cambio y conservación. ¿Qué cambia? ¿Qué se conserva en la situación planteada? Cambia la forma de una hoja de papel y se quiere saber, en este caso, si hay conservación del volumen, tal como sucede en cuerpos clásicos, donde además del volumen, se conserva la masa, luego la densidad. Específicamente, los alumnos y alumnas deben adquirir competencias que le faciliten construir una cosmovisión sobre la física donde es relevante, entre otras cosas, el hecho de que esta ciencia no es cerrada y que tiene como criterio de la verdad, la experiencia; deben, además, saber realizar mediciones, diseñar una experiencia para recoger evidencias, ordenar las evidencias en tablas y gráficos para leerlos e interpretarlos, diseñar y construir un modelo que explique lo que pasa si no se corrobora la consigna vía la experiencia. Es decir, administrar un cambio de paradigma.

Consigna o afirmación que expone la situación a resolver

“El volumen de una hoja de papel no es afectado por la forma que tome dicha hoja de papel”.

Interés o idea principal de la situación a resolver

Los fenómenos naturales, con estructura matemática, que estudia la física, están regidos por leyes de cambio y conservación. La adquisición de ambos conceptos, por parte de los alumnos y alumnas no es fácil y

mucho menos intuitiva, aunque así parezca. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, se puede decir que es bien sabido que los objetos clásicos, pueden cambiar la forma, pero este cambio de forma está seguido de la conservación de cantidades físicas, como el volumen, la masa y luego la densidad del objeto. ¿Pasaría lo mismo

para objetos no clásicos? Y hablamos de objetos no clásicos, pues, en el proceso de cambiar la forma del volumen de una hoja de papel a una esfera, no obtenemos realmente una esfera, obtenemos una aproximación a una esfera, figura 3.101.



Figura 3.101.
Aproximación a una esfera.

En consecuencia, el desarrollo de esta experiencia puede llevar a comprender y dar sentido a la afirmación donde se expresa que el criterio de la verdad en física es la experiencia. Pues, la primera hipótesis de muchos podría ser que nada va a cambiar, pero, esta afirmación sólo la puede avalar la experiencia. Ante esto, el contraste de lo que realmente ocurre con lo que debería ocurrir, puede llevar a los alumnos a que vean la importancia de adquirir o hacer suyas ciertas habilidades y competencias de tipo procedimental que son la base del hacer del físico al hacer física. Como por ejemplo:

1. Leer de forma crítica;
2. indentificar, en la lectura, las propiedades medibles del fenómeno que le dan forma y sentido;
3. diseñar y construir una estrategia de trabajo que lleve a la comprobación o no de la afirmación;
4. diseñar y construir un sistema de toma de datos donde el control de la incertidumbre sistemática y aleatoria en la medición se pueda controlar y/o disminuir;
5. organizar datos en tablas y gráficos de forma tal que se puedan analizar e interpretar

los mismos;

6. establecer los elementos necesarios para construir un modelo que explique lo que ocurre.

¿Se podría diseñar una experiencia centrada en la resolución de la consigna planteada?

Sí. La experiencia que todos conocemos es la que se hace con masilla. Se parte la barra de masilla en diferentes tamaños o se le da distintas formas y se interpela al alumno sobre si hay conservación del volumen o la masa de la masilla. Entonces, sí es viable hacer una experiencia

para corroborar la consigna que nos ocupa.

Sin embargo, no es siempre cierto. Veamos otra experiencia donde se simuló un pulmón. ¿Cómo se simuló un pulmón? Para simular un pulmón se usó dos tipos de hojas de papel, bond de 20 libras y papel de cometa. Ambos tipos de papel están hechos con fibras secas de los árboles, pero con distinta tecnología. Específicamente, la simulación del pulmón pasó por formar esferas con trozos de papel de distintas áreas. Se escoge la forma de esfera porque es fácil medir su volumen, sólo hay que medir el diámetro de cada una, figura 3.102.

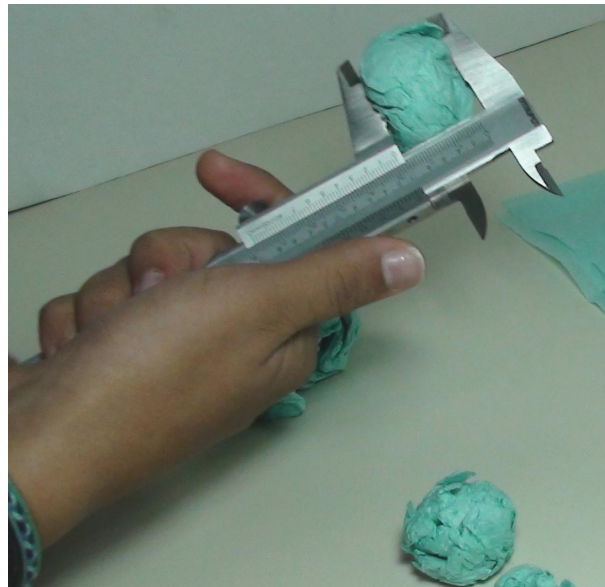


Figura 3.102.
Medición del diámetro de la esfera construida.

En esta experiencia, la afirmación sobre que la densidad de cada tipo de papel es constante fue fundamental. Pues, si la densidad de ambos tipos de papel es constante, así como

su espesor, entonces, sólo cambia el área y la forma. Esto avala la afirmación: “medir las áreas es medir el volumen”. En consecuencia, las variables a analizar y estudiar son el diámetro de

cada esfera y el área del papel a partir del cual se construyeron las esferas.

Es necesario señalar que:

- la esfera más pequeña de cada grupo fue construida a partir de un área tomada como unidad. Las siguientes esferas en tamaño (de menor a mayor) fueron construida a partir de un área que es siempre el doble del área precedente y así sucesivamente.
- la garantía total de que cada esfera construida sea totalmente compacta y sólida no existe, es decir, no podemos asegurar que no hay espacios de aire dentro de cada una. Estos espacios de aire provocan que la distancia del centro de cada esfera, a cualquier punto sobre su superficie no sea una constante. Con la finalidad de controlar la incertidumbre aleatoria introducida por estos espacios con aire dentro de las esferas, procedimos a medir el diámetro de cada esfera desde distintos puntos a partir de su superficie, unas 15 veces.
- el experimentador asume como consigna “compactar lo más posible la hoja al formar la esfera”
- la medición del diámetro de cada esfera se realizó con un pie de rey con una precisión de 0,03 mm.

¿Qué evidencias o pruebas se pueden obtener para poder comprender construir un modelo explicativo sobre la situación planteada?

La evidencia recopilada (datos obtenidos) para ser interpretados y analizados deben ser ordenados en tablas y gráficos.

En el cuadro 3.57, se presentan los datos obtenidos de la medición del diámetro de cada esfera construida con papel bond. Se construyeron cinco esferas (cantidad mínima de puntos para hacer un gráfico confiable) y todas a partir de distintas áreas de papel.

La primera columna del cuadro 3.57, corresponde a las mediciones del diámetro de la esfera construida a partir de un área de 16 veces la unidad; la segunda columna corresponde a la medición del diámetro de la esfera de un área de 8 veces la unidad, y así sucesivamente.

En el cuadro 3.58 se presenta la información obtenida del análisis estadístico realizado al conjunto de datos por columna.

La primera columna de esta última tabla corresponde al promedio de los diámetros de cada esfera por área. La segunda y tercera columna presenta la información de la desviación estándar y la incertidumbre típica de cada valor promedio respectivamente.

En la figura 3.103 mostramos la representación gráfica (en hoja cuadrículada) de los diámetros promedios vs el área de cada uno con su respectiva desviación estándar.

Al linealizar esta curva en papel doblemente logarítmico se obtiene la gráfica mostrada en la figura 3.104.

Diámetros (u^2)				
16	8,0	4,0	2,0	1,0
4,167	2,734	2,034	1,456	1,112
4,212	2,678	1,767	1,378	1,167
4,234	2,756	2,078	1,512	1,156
3,923	2,656	1,945	1,267	1,189
3,867	2,689	2,212	1,501	1,189
4,145	2,878	2,012	1,145	1,189
3,667	2,734	1,901	1,312	1,167
3,908	2,708	1,989	1,212	1,067
3,712	2,534	1,934	1,634	1,012
4,078	2,823	2,089	1,578	1,067
3,567	2,934	1,889	1,167	1,089
3,745	2,867	1,902	1,389	1,134
3,734	2,789	1,856	1,178	1,078
3,901	2,456	1,934	1,245	1,045
3,656	2,467	1,867	1,245	1,067

Cuadro 3.57:
Esferas construidas a partir de diferentes áreas de papel bond.

Promedio (mm)	σ	σ_t
3,90	0,22	0,06
2,71	0,14	0,04
1,96	0,11	0,03
1,35	0,16	0,04
1,12	0,06	0,02

Cuadro 3.58: *Resultados del análisis estadístico de los datos.*

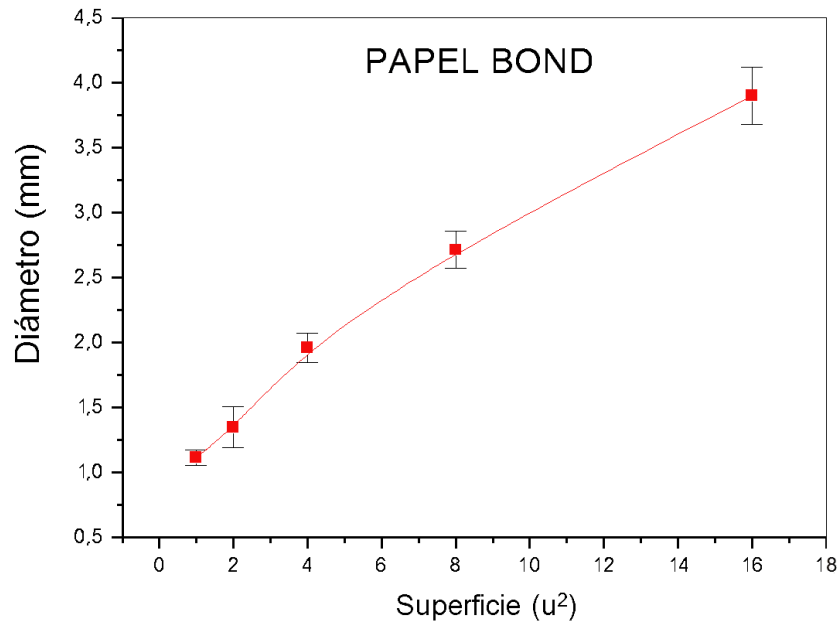


Figura 3.103.
 Datos ordenados sobre papel milimetrado.

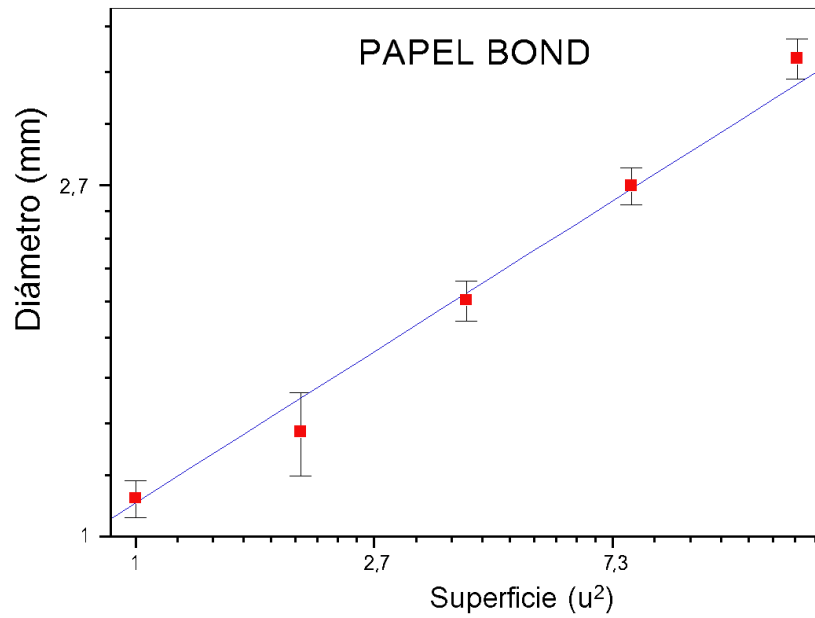


Figura 3.104.
 Gráfico linealizado ej papel log-log.

La hipótesis inicial es,

$$V_{\text{par}} = \varepsilon A = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 = V_{\text{esf}} \quad (3.52)$$

Donde V_{par} es el volumen de la hoja de papel y V_{esf} es el volumen de la esfera.

$$A = \frac{\pi}{6\varepsilon} d^3 = d^3 \quad (3.53)$$

donde,

$$a = \frac{\pi}{6\varepsilon}; \quad (3.54)$$

La ecuación que representa la relación entre las variables Área (A) y diámetro (d) es, de acuerdo a la experiencia,

$$A = a d^{2,32} \quad (3.55)$$

El exponente de la expresión anterior (2,32), que corresponde a la pendiente del gráfico, nos dice que la afirmación referente a que la forma que toma el cuerpo no afecta su volumen, no tiene un alto nivel de certeza. Para que esta afirmación fuese totalmente cierta el exponente debe ser 3,0, pero, el exponente obtenido solo se acerca a 3,0. En este sentido podemos afirmar que las esferas construidas no tienen la forma de una esfera clásica, es decir, no hemos construido esferas compactas ni perfectas.

Observación de la expresión 3.55, es equivalente a $d = b A^{0,431}$

La afirmación, cuyo nivel de certeza queremos comprobar, vía la experiencia, ¿se acercaría más a la realidad si procedemos a hacer la misma experiencia, pero, ahora con otro tipo de papel, en este caso papel cometa que es más fácil compactar? Es decir, ¿será que el nivel de certeza de esta afirmación depende del papel? No lo sabemos, vayamos a la experiencia, el criterio de la verdad en Ciencia y en particular en Física.

En el cuadro 3.59 se presentan los datos obtenidos de la medición del diámetro de cada esfera construida con papel cometa. La primera columna de la tabla anterior, como ya sabemos, corresponde a las mediciones del diámetro de la esfera construida a partir de un área de 64 veces la unidad; la segunda columna corresponde a la medición del diámetro de la esfera de un área de 32 veces la unidad, y así sucesivamente.

La primera columna de la tabla anterior corresponde al promedio de los diámetros de cada esfera por área. La segunda y tercera columna presenta la información de la desviación estándar y la incertidumbre típica de cada valor promedio respectivamente.

En la figura 3.105 mostramos, la gráfica (en hoja cuadrículada) de los diámetros promedios vs el área de cada uno con su respectiva desviación estándar.

Al linealizar esta curva en papel doblemente logarítmico obtenemos la gráfica mostrada en la figura 3.106.

La ecuación que representa la relación existente entre el Área (A) y el diámetro (d) de las esferas es,

$$A = ad^{2,27} \quad (3.56)$$

El exponente de la expresión anterior (2,27), que corresponde a la pendiente del gráfico, tampoco acepta la afirmación referente a que la forma que toma el cuerpo no afecta su volumen.

Diámetros (u ²)						
64	32	16	8,0	4,0	2,0	1,0
4,367	3,134	2,645	1,889	1,323	1,089	0,678
4,156	3,045	2,678	1,789	1,301	1,089	0,656
3,701	3,256	2,534	1,978	1,301	0,912	0,712
3,934	3,345	2,312	1,923	1,356	1,034	0,734
4,234	3,234	2,467	1,845	1,301	1,089	0,701
4,256	3,956	2,567	1,823	1,234	0,967	0,745
4,056	3,045	2,334	1,834	1,301	0,834	0,656
4,078	3,856	2,456	1,912	1,256	0,901	0,734
3,823	3,056	2,312	1,878	1,245	1,012	0,745
4,156	3,078	2,245	1,934	1,301	0,956	0,678
4,145	3,089	2,456	1,889	1,234	0,978	0,623
4,123	3,967	2,556	1,512	1,245	1,012	0,601
4,289	3,323	2,508	1,889	1,256	1,012	0,789
4,134	3,067	2,534	1,23	1,189	1,034	0,712
4,278	3,089	2,556	1,234	1,201	0,878	0,656

Cuadro 3.59:
Esferas construidas a partir de diferentes áreas de papel cometa.

Promedio (mm)	σ	σ_t
4,12	0,18	0,05
3,17	0,22	0,06
2,48	0,13	0,03
1,81	0,19	0,05
1,27	0,05	0,01
0,99	0,08	0,02
0,69	0,05	0,01

Cuadro 3.60: Resultados del análisis estadístico de los datos.

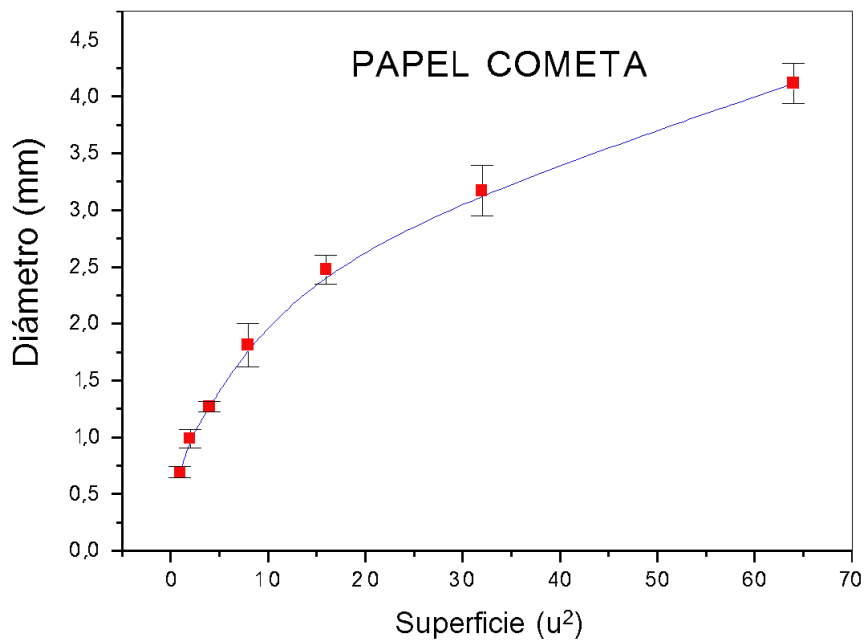


Figura 3.105.
 Datos ordenados sobre papel milimetrado.

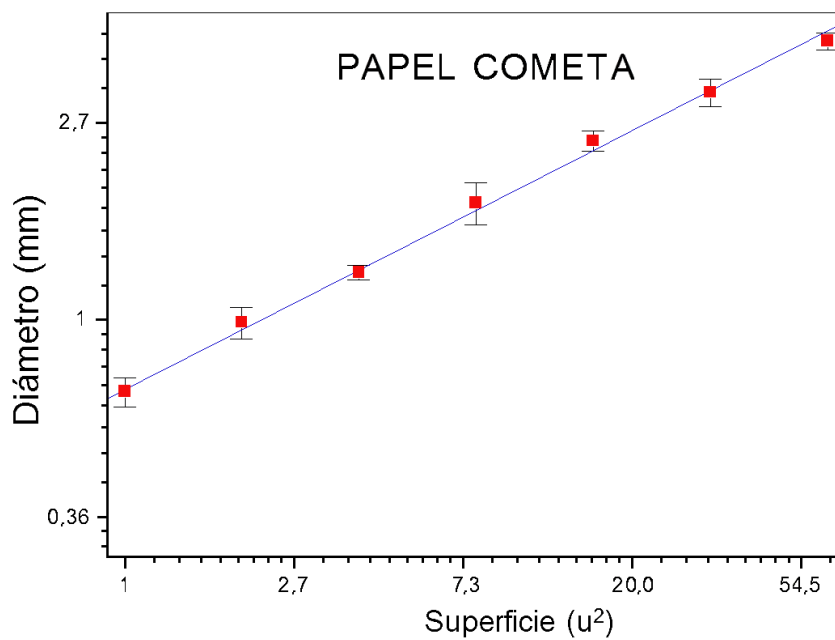


Figura 3.106.
 Gráfico linealizado ej papel log-log.

Observación de la expresión 3.56, es equivalente a $d = bA^{0.441}$

Hacia la construcción de un nuevo modelo explicativo

La evidencia nos dice que la esfera formada con los trozos de papel no es una esfera perfecta, en consecuencia, la misma no es una figura clásica. Por ello, sirve adecuadamente para simular los pulmones. En este punto se hace necesario traer a colación lo expresado sobre los pulmones: parecen frijoles grandes, porosos, se sitúan en la caja torácica, ocupan un volumen, en el hombre, de alrededor de 1 600 cm³ y en la mujer de 1 300 cm³ al estar expandidos; estirados tienen una superficie de alrededor de 70 m², en adultos. En el caso de los pulmones la naturaleza tuvo que resolver un problema que consistía en lo siguiente: poner la mayor superficie (para mayor contacto con el aire) posible en el menor volumen (caja torácica) posible, dado ciertas restricciones, como por ejemplo el material con el cual debía generar ese objeto estaba restringido a cierto tipo de tejidos. Por todo esto, para simular un pulmón, se utilizaron hojas de papel de dos tipos y de densidad constante. La experiencia realizada nos dice que al formar las esferas con cualquiera de los dos tipos de hoja de papel sólo podemos aproximarnos a una esfera, pues, no tendremos nunca una esfera perfecta tal como ya hemos señalado. Debido a los

resultados obtenidos, tenemos que el modelo que explica lo que sucede son los fractales, que tienen una dimensión espacial no entera. Tienen una dimensión expresada con fracciones.

Conclusión

Este último resultado nos dice que la afirmación que hemos sometido al criterio de la verdad en ciencia, la experiencia, sólo será verdadera si la figura geométrica que se llegue a construir es una figura clásica. Es decir, para que la afirmación de que la forma que toma el cuerpo no afecta su volumen, sea verdadera necesitamos construir esferas clásicas totalmente compactas y perfectas. En consecuencia, en la medida que se logre esto último, esferas compactas y perfectas, la afirmación será verdadera. Pero, por lo pronto la afirmación que hemos estado estudiando, vía esta experiencia, no es del todo cierta, y por lo tanto, no tiene un alto nivel de certeza siempre. Se trata de cuerpos denominados fractales, para los cuales la dimensión del espacio en los que esos objetos están inmersos, no tiene dimensión entera, sino fraccionaria. Ellos responden a otra geometría llamada por Benoit Mandelbrot: geometría fractal.

Reflexión

En la descripción de lo hecho en esta experiencia hemos simulado el pulmón humano, a través de una pequeña y simple experien-

cia. Ello nos dice, que muchas veces dedicamos tiempo a buscar la super experiencia, que por lo general siempre es muy costosa, con lo que nos olvidamos de lo fructífera que puede ser, para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la física, el llevar al aula situaciones y/o fenómenos simples. No tomamos en cuenta que los grandes padres de la física, no tenían a su disposición complejos aparatos de medición, para conversar con la naturaleza. Es importante comprender la naturaleza de la física, lo que nos llevaría a comprender la belleza de los fenómenos simples y cómo esta ciencia los ha comprendido y ha llegado hasta donde ha llegado.